

bimestrale,
febbraio
2019

ISSN 0036-4681 - ISBN 978-88-220-9435-3 - anno 85°, n. 1 / € 7,50

Sapere

idee e progressi della scienza

 edizioni
Dedalo

INGEGNERIA AEROSPAZIALE

Breve storia
dello Space Shuttle

STORIA DELLA SCIENZA

Torino: l'Università sotto
i colpi delle leggi razziali



GEOLOGIA

Il terremoto in Emilia:
una storia mai raccontata



Perché il matematico non gioca d'azzardo

Il gioco d'azzardo è un fenomeno oggi purtroppo sempre più diffuso. Il calcolo delle probabilità però ci permette di capire che l'unica certezza è la "rovina del giocatore".

Gianfranco Arrigo,
Nucleo di Ricerca
in Didattica
della matematica
(NRD), Bologna

Possiamo affermare che l'essere umano pensante abbia ben presto percepito la casualità, cioè l'esistenza di qualcosa che potrebbe accadere ma che non si sa se accadrà veramente, ben diversa dall'affermazione sicura, per esempio il tempo che farà domani (pioverà, non pioverà, sarà una giornata calda, afosa, oppure temperata, fredda, ecc.) o il bottino di una battuta di caccia (sarà scarso, sufficiente, abbondante, ecc.). Oggi li chiamiamo "eventi casuali", risultati possibili – ma di solito non certi! – di una determinata situazione, che denominiamo "prova aleatoria". Una volta riconosciuto che esistono prove aleatorie ed eventi casuali, in modo quasi automatico l'essere umano ha tentato di formulare previsioni (ottimistiche, pessimistiche, realistiche), cioè ha cercato di indovinare quale poteva essere l'esito di una determinata prova aleatoria ("domani farà bel tempo") e, compiendo un nuovo passo conoscitivo, ha associato agli eventi possibili un giudizio qualitativo circa la loro credibilità ("è quasi sicuro che domani pioverà", "è praticamente impossibile che da solo riesca a uccidere una tigre"). A poco a poco il giudizio induce una sorta di gerarchia della credibilità di vari eventi possibili, per esempio "è più facile che riesca a catturare una tartaruga piuttosto che una gazzella" o "se tiro una freccia verso un fagiano, posso ugualmente colpirlo oppure no".

Da qui alla quantificazione del tasso di credibilità il percorso non dev'essere stato breve, ma si è rivelato un passo decisivo verso quello che poi, sul finire del Medioevo, ha portato all'idea di

"probabilità", cioè di misura della credibilità del realizzarsi di un dato evento. Si pensa che il passo sia stato possibile grazie soprattutto al gioco d'azzardo, attività che già dai tempi dei Greci e dei Ro-

mani era praticata ovunque alle nostre latitudini e non solo, indipendentemente dal ceto sociale. Si giocava per strada come a corte. Si usavano sia i dadi cubici sia gli astragali (o aliossi), dadi a quattro facce ricavati dall'omonimo osso del tallone di una capra o di un montone. I dadi cubici di quel tempo erano come quelli odierni, ossia con sei facce equiprobabili, ciascuna con probabilità 1/6 di realizzarsi.

Fino ai primi secoli del secondo millennio non si hanno però notizie di tentativi di descrivere



Giocatori di dadi romani raffigurati in un affresco dell'Osteria della Via di Mercurio a Pompei.

la probabilità mediante un numero. Uno dei giochi che andavano per la maggiore era il cosiddetto gioco della zara (*zhar* in arabo significa “dado”, e da qui parrebbe derivare anche il termine azzardo). Consisteva nello scommettere sulla somma dei punti che si ottiene lanciando tre dadi cubici. I giocatori, per esperienza, sapevano che le somme estreme $3 = 1 + 1 + 1$ e $18 = 6 + 6 + 6$ uscivano molto raramente e giocando più volte intuivano che conveniva scommettere su quelle centrali dell’intervallo da 3 a 18, cioè 10 e 11.

Persino Dante, nella *Divina Commedia*, dedica alcuni versi al gioco della zara (*Purgatorio*, canto VI): «Quando si parte il gioco de la zara, / colui che perde si riman dolente, / ripetendo le volte, e tristo impara, / con l’altro se ne va tutta la gente». Già

all’inizio del Trecento, Dante mette in risalto quindi il fatto che il gioco d’azzardo, a lungo andare, porta il giocatore a una perdita, che in certi casi può anche assumere dimensioni disastrose [1].

Particolarmente interessanti sono i primi commenti scritti su questi versi. In particolare, Jacopo di Giovanni della Lana, pochi anni dopo la scomparsa del sommo vate, afferma chiaramente che le somme dei punti ottenibili in più modi devono apparire con maggiore frequenza, ma riconosce anche

Il gioco d’azzardo era praticato già ai tempi dei Greci e dei Romani, ovunque e indipendentemente dal ceto sociale.

– e questo è importante! – che a volte possono occorrere somme ottenibili in meno modi. Sbaglia però i calcoli perché dice, per esempio, che 4 può essere ottenuto in un sol modo ($4 = 1 + 1 + 2$), mentre sappiamo che vi sono altri due modi possibili ($4 = 1 + 2 + 1$ e $4 = 2 + 1 + 1$).

Sul calcolo dei casi equamente possibili hanno errato anche personaggi ben più famosi. Nel XVIII secolo, sulle pagine dell’*Enciclopedia*, d’Alembert scrive che, lanciando tre volte una moneta, i



Particolare del dipinto di Pieter Bruegel il Vecchio, *Giochi di bambini*, del 1560, in cui si vede una donna che gioca con gli astragali.

risultati possibili sono tre e non quattro (croce/testa, testa/croce, testa/testa e croce/croce). Persino Leibniz cade nell’errore perché sostiene che, nel lancio di due dadi, la somma 11 si può ottenere in un sol modo, $11 = 6 + 5$, dimenticando il caso $11 = 5 + 6$.

Ben diversi erano i giochi praticati con gli astragali. Prima di tutto perché l’astragalo, in quanto dado, ha solo quattro facce che non sono equiprobabili. Per di più, mentre l’equiprobabilità delle facce di un dado cubico (e, aggiungerei, ideale) si può dimostrare mediante la struttura geometrica del poliedro regolare, in particolare le sue simmetrie, nel caso dell’astragalo, corpo del tutto irregolare, ciò non è possibile. Quindi le probabilità delle facce si possono solo stimare lanciando l’astragalo parecchie volte e contando le frequenze di apparizione delle facce. Anche oggi, l’unico modo per determinare una stima della probabilità in questi casi consiste nel ripetere un gran numero di volte la prova e annotare tutti i risultati. Si può quindi calcolare la frequenza relativa di apparizione di ogni faccia e assumere questa come probabilità (i matematici parlano in questo caso di probabilità “frequentista”). Una chicca: due decenni fa, il matematico svizzero Robert Ineichen [2] si è cimentato con questo problema; ha lanciato 200 volte un astragalo, deducendone le seguenti stime di probabilità: due facce hanno probabilità 0,1 e

le altre due hanno probabilità 0,4. Questi valori non contraddicono le stime qualitative operate dai giocatori d'azzardo nel Medioevo.

Sino al XV secolo, però, non si trovano tracce della nascita di un vero calcolo delle probabilità. Potrebbe essere che i giocatori avessero un'approssimativa idea grezza delle frequenze relative, altrimenti non si spiegherebbe la loro preoccupazione di poter disporre di dadi corretti, né d'altro canto la costruzione di dadi truccati.

La nascita del calcolo delle probabilità

Sono due i personaggi ai quali possiamo attribuire i primi studi sul calcolo delle probabilità, nel XVI secolo: gli italiani Girolamo Cardano e Galileo Galilei.

Il primo, uomo eclettico, figlio illegittimo del nobile Fazio Cardano, fu medico, matematico, filosofo, astrologo e, per quel che ci concerne, anche giocatore d'azzardo. Ebbe una vita molto travagliata: egli stesso scrisse di essere nato «dopo che mia madre aveva tentato senza risultato dei preparati per abortire» (*De vita propria*). Accusato di eresia, sfuggì al rogo solo grazie alla sua fama di grande medico e agli ottimi rapporti che intratteneva con i potenti di allora. A noi interessa sapere che intorno al 1564 Cardano scrive la sua opera *Liber de ludo aleae*, che venne pubblicata solo nel 1663 a Parigi insieme ad altri suoi scritti. Per certi versi questo testo può essere considerato il primo tentativo di dare una sistemazione alle conoscenze sul calcolo delle probabilità. Da grande conoscitore del gioco d'azzardo, Cardano si preoccupa di studiare la matematica sottostante. Vediamo due esempi.

Calcolo della probabilità di ottenere il valore 1 almeno una volta, lanciando due dadi

Ecco schematicamente il ragionamento di Cardano. I possibili casi sono: (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6) e i loro "gemelli" (2; 1), (3; 1), (4; 1), (5; 1), (6; 1).

In totale si hanno 11 possibilità vincenti sulle 36 possibili. La probabilità di vincere è quindi, in linguaggio attuale, $11/36 \cong 0,3 = 30\%$

Calcolo delle probabilità concernenti il gioco della zara

Con un ragionamento analogo, Cardano ottiene tutti i risultati relativi al gioco della zara.

Sortis		
3	18	1
4	17	3
5	16	6
6	15	10
7	14	15
8	13	21
9	12	25
10	11	27

Questa tabella è tratta dal *Liber de ludo aleae*. Vuol dire che i risultati 3 e 18 si possono ottenere in un solo modo; i risultati 4 e 17 si possono ottenere in tre modi: il 4 con (1; 1; 2), (1; 2; 1), (2; 1; 1), e il 17 con (6; 6; 5), (6; 5; 6) e (5; 6; 6); e così via.

Per esempio si può dedurre che la probabilità più alta è relativa alle somme 10 e 11, e vale $27/216 = 0,125 = 12,5\%$.

Di Galileo ricordiamo che nel trattato *Sopra le scoperte dei dadi*, del 1596, si occupò di alcuni giochi coi dadi (zara compresa), ottenendo risultati corretti. In particolare, Galileo mostra chiaramente perché nel lancio di tre dadi la somma 10 appare più frequentemente della 9 [3].

Un secolo dopo, nella Francia seicentesca, a dedicarsi al calcolo delle probabilità furono tre rinomati personaggi: lo scrittore Antoine Gombaud, cavaliere de Méré, il matematico e filosofo Blaise Pascal, e il matematico Pierre de Fermat. Il cavaliere è un giocatore incallito. Incontra i due matematici in un salotto parigino, se li fa amici e propone loro alcuni problemi relativi al gioco d'azzardo.

Eccone un esempio: il giocatore lancia un dado per 4 volte. Vince se esce il numero 6 almeno una volta. In tal caso riceve il doppio della posta. Vale la pena giocare?

I due matematici calcolano la probabilità di vincere, applicando un ragionamento che mostra già una conoscenza più strutturata, cioè calcolano la probabilità dell'evento perdente $(5/6)^4$ e la sottraggono a 1, ottenendo così quella richiesta (leggermente maggiore del 50%): $1 - (5/6)^4 \cong 0,518 = 51,8\%$.

In un altro problema proposto da de Méré, il giocatore lancia due dadi 24 volte. Se esce almeno una volta un doppio 6, vince il doppio della posta. De Méré era convinto che il rendimento di questo gioco fosse lo stesso di quello precedente. Secondo Pascal ha ragione, ma Fermat non è d'accordo. Infatti secondo i suoi calcoli: $1 - (35/36)^{24} \cong 0,491 = 49,1\%$ (probabilità leggermente minore del 50%).



La roulette francese è composta da un tappeto verde che accoglie le scommesse dei giocatori e da un cilindro (propriamente detto roulette) nel quale la pallina viene fatta girare velocemente dal croupier fino a fermarsi in un incavo, che determina il numero vincente.

Pascal e Fermat sono generalmente considerati i padri del calcolo delle probabilità, tuttavia non si devono dimenticare Cardano e Galileo, vissuti prima di loro.

Come valutare un gioco d'azzardo?

Schematicamente un gioco d'azzardo si presenta così. C'è il Banco che comanda il gioco e il Giocatore che scommette pagando una posta. Se il Giocatore vince, riceve la posta moltiplicata per un numero scelto e dichiarato dal Banco; se perde ci rimette la posta. Possiamo chiamare con delle sigle le variabili in gioco [4]:

- PO, la posta giocata;
- FA, il fattore che, moltiplicato per la posta, dà la vincita;
- PV, la probabilità di vittoria;
- SP, la speranza matematica di vincita.

Quest'ultima si calcola:

$$SP = PV \times (FA - 1) \times PO - (1 - PV) \times PO \\ = (PV \times FA - 1) \times PO$$

Il gioco è favorevole al giocatore se $SP > 0$, cioè se $(PV \times FA - 1) \times PO > 0$, ossia se:

$$RE = PV \times FA > 1.$$

RE è chiamato "rendimento del gioco" (si riferisce al giocatore). Possiamo per esempio applicare questa definizione ai giochi del cavaliere de Méré: nel primo gioco $RE = 0,518 \times 2 = 1,036 > 1$ (gioco favorevole al Giocatore); nel secondo gioco, $RE = 0,491 \times 2 = 0,982 < 1$ (gioco favorevole al Banco).

Il rosso e il nero

Vediamo ora l'esempio di un moderno gioco da casinò: la roulette. Sulla ruota della roulette sono disposti, secondo rigidi criteri di alternanza, i numeri da 1 a 36, per metà rossi e per metà neri, e lo 0, di colore verde, che determina la vincita del casinò. I numeri rossi e neri sono riportati sul tappeto verde delle scommesse, allineati su 3 colonne, ciascuna composta di 12 righe.

Si possono scegliere diversi tipi di scommesse, per esempio:

- giocata secca (detta *En plein*): se si indovina il numero, si riceve 36 volte la posta giocata ($PO = 36$), quindi $RE = (1/37) \times 36 = 36/37 \cong 0,973 < 1$, il gioco favorisce il casinò;

- *Rouge/Noir*; se si indovina il colore si riceve 2 volte la posta puntata; ci sono 18 casi favorevoli, $RE = (18/37) \times 2 \cong 0,973$, di nuovo il casinò è favorito;

- la *Douzaine* (12 numeri); se esce uno dei 12 numeri scelti si riceve 3 volte la posta; vi sono 12 casi favorevoli, $RE = (12/37) \times 3 = 36/37 \cong 0,973 < 1$, come nei casi precedenti il casinò è favorito.

Conclusione

Il calcolo delle probabilità, che come abbiamo visto si è sviluppato a partire dai secoli XVI e XVII, ha ricevuto il riconoscimento ufficiale dei matematici solo nel 1933, quando il russo Andrej Nikolaevič Kolmogorov pubblicò il *Sistema assiomatico della teoria della probabilità*. È sorprendente notare la semplicità di questo sistema di assiomi [5].

Nel caso di un insieme finito di eventi, può essere facilmente compreso anche da uno scolaro (i lettori adulti che non ricordano i simboli della

logica possono cogliere l'occasione per dar loro una rispolverata):

1. Ad ogni evento $A \subset U$ è associato un numero reale non negativo $p(A)$, detto probabilità di A.

2. $p(U) = 1$.

3. Se A_1, A_2, \dots, A_n sono eventi disgiunti, si ha $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$.

**Solo se
il rendimento
è maggiore di 1,
il gioco
è favorevole
al Giocatore.**

A livello elementare, U può essere pensato come l'insieme dei risultati possibili di una prova aleatoria. Nel caso del lancio di un dado, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, mentre $A = \{2, 4, 6\}$ può rappresentare l'evento "il risultato è un numero pari".

Oggi il calcolo delle probabilità è diventato una branca importante della matematica, le cui applicazioni si trovano in tutte le discipline scientifiche o meno. Purtroppo questo grande sviluppo non è stato avvertito dalla scuola in modo adeguato. Il risultato lo si avverte: la popo-

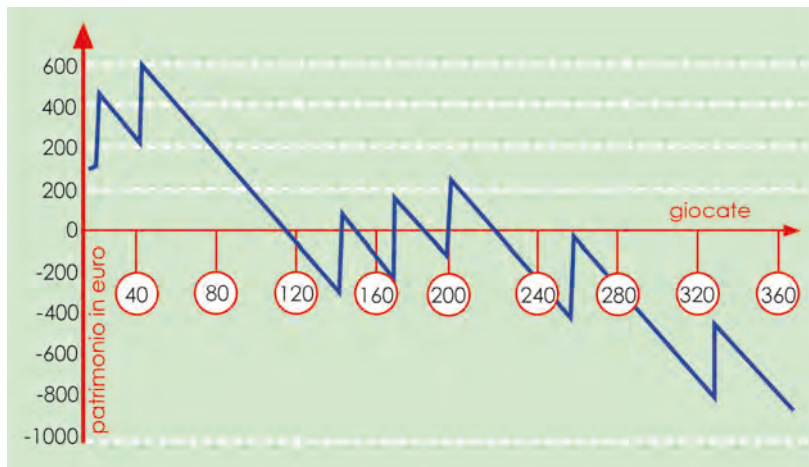
lazione in generale non sa interpretare gli eventi casuali, men che meno conosce il senso della probabilità matematica. Gli studenti liceali faticano molto a entrare in questo ordine di idee, perché manca loro un'adeguata esperienza acquisibile negli ordini di scuola precedenti.

Il fenomeno diventa preoccupante nel caso dei giochi d'azzardo: lotterie, scommesse di ogni genere, slot machine e via dicendo costituiscono una importante fonte di guadagno per gli organizzatori e un'affascinante e pericolosa attività di svago per molti giocatori, ignari della rovina che può loro riservare quando subentra l'assuefazione.

L'esempio dei giochi da casinò è molto significativo: il rendimento del giocatore (RE) è sempre minore di uno, il che significa un leggero vantaggio del casinò. Ciò appare comprensibile perché il casinò deve avere il suo utile. Ma ci si può chiedere perché il rendimento del giocatore risulta solo "leggermente" inferiore a uno. Qui sta il nocciolo della questione: se RE fosse chiaramente minore di uno, i casinò dovrebbero chiudere per mancanza di clienti.

Oggi il calcolo delle probabilità è una branca importante della matematica, con applicazioni in molte discipline.

Per contro, con un rendimento solo leggermente inferiore a uno, il gioco diventa attrattivo e ogni tanto qualcuno azzecca vincite importanti. In queste occasioni i media non si lasciano sfuggire



Andamento del patrimonio di un giocatore che gioca l'en plein alla roulette partendo da un capitale iniziale di 100 €, giocando ogni volta 10 €.

la notizia e così facendo, involontariamente, procurano ancora più clienti alle case da gioco.

Per finire, osserviamo il risultato di una simulazione del fenomeno "la rovina del giocatore" ottenuta con un semplice foglio elettronico.

Si nota la malizia insita nel fenomeno. Se il grafico del patrimonio scendesse continuamente, il Giocatore prima o poi si ritirerebbe. Per contro, questo andamento di continui sali-scendi illude il giocatore e ogni tanto lo fa anche vincere, alimentando la sua voglia di continuare. Nell'esempio, si vede come il Giocatore parte molto bene e arriva persino ad aumentare il suo patrimonio da 100 € a 600 €. Continuando a giocare, però, la curva del suo patrimonio scende, ogni tanto ha dei sussulti (ecco l'incoraggiamento), ma globalmente scende, scende, scende...

E se il Giocatore non si accorge o non trova il coraggio di smettere, la rovina è assicurata. Ecco perché il matematico non gioca d'azzardo!

Riferimenti bibliografici

- [1] B. D'AMORE, *Più che l'doppiar de li scacchi s'inmilla*, Pitagora, Bologna 2001.
- [2] R. INEICHEN, "Dadi, astragali e gli inizi del calcolo delle probabilità", *Quaderni della Facoltà di Scienze economiche di Lugano*, n. 2000-04.
- [3] A. ENGEL, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Klett, Stuttgart 1996.
- [4] R. BERSANI, E. PERES, *Matematica, se la conosci non la eviti*, Ponte alle Grazie, Milano 2010.
- [5] B.W. GNEDENKO, *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Akademie Verlag, Berlin 1962.